Άσκηση Φυλ. 13

13. Η επίπεδη επιφάνεια του σχήματος (Σχήμα 45) περιορίζεται από τον άξονα x και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, $(y > 0)$ και έχει επιφανειακή πυκνότητα $\rho_s = 3\ kgr/m^2$. Να υπολογιστούν: (i) η μάζα της επιφάνειας και (ii) οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας της επιφάνειας.

(i) Η επιφανειακή πυκνότητα της επιφάνειας, S είναι:

$$\rho = \frac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \rho\, dS$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε τη μάζα της επιφάνειας:

$$m = \iint_S \rho_s\, dS \overset{\rho = 3kgr/m^2}{=\!=} \iint_S 3\, dx dy = 3 \iint_S dx dy$$, κάνω αλλαγή

μεταβλητών σε πολικές: $3\int_0^1\int_0^{\pi} r\, d\phi\, dr = 3\pi \int_0^1 r\, dr = 3\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}$

(ii) Το διάνυσμα $\bar{r}_s$ του κέντρου μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{r}_s = \frac{\rho \iint_S \bar{r}\, dS}{m} = \frac{\cancel{\rho} \iint_S \bar{r}\, dS}{\cancel{\rho}\, S} = \frac{\iint_S x\, dS\, \bar{x}_0 + \iint_S y\, dS\, \bar{y}_0}{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_s = \dfrac{\iint_S x\, dS}{S} \\ y_s = \dfrac{\iint_S y\, dS}{S} \end{cases}$$, Άρα $\iint_S x\, dS = \iint_S x\, dy\, dx$,

σε πολικές $= \int_0^1 \int_0^{\pi} r \cos\theta\, r\, d\theta\, dr =$

$= \int_0^1 r^2 [\sin\theta]_0^{\pi} dr = 0$, και

$\iint_S y\, dS = \iint_S y\, dy\, dx$, σε πολικές $\int_0^1 \int_0^{\pi} r \sin\theta\, r\, d\theta\, dr = \int_0^1 r^2 [-\cos\theta]_0^{\pi} dr =$

$= 2\int_0^1 r^2 dr = 2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$, και $S = \int_0^1 \int_0^{\pi} r\, d\theta\, dr = \frac{\pi}{2}$

οπότε $x_s = 0$ και $y_s = \frac{4}{3\pi}$, ή $\bar{r}_s = 0\,\bar{x}_0 + \frac{4}{3\pi}\,\bar{y}_0$

Άσκηση Φυλ. 14

14. Δύο σωματίδια με μάζες m_1 και m_2 κινούνται έτσι ώστε η σχετική τους ταχύτητα να είναι $\vec{u}$ και η ταχύτητα του κέντρου μάζας τους $\vec{u}_1$ (Σχήμα 46). Αν $M = m_1 + m_2$ είναι η ολική μάζα και $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ είναι η ανηγμένη μάζα του συστήματος να δειχθεί ότι η ολική κινητική ενέργεια είναι $\dfrac{1}{2}M\vec{u}_1^2 + \dfrac{1}{2}\mu\vec{u}^2$.

Έστω $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ και $\bar{r}$ τα διανύσματα θέσης των μαζών m_1, m_2 και του κέντρου μάζας, c, ως προς το O, αντίστοιχα.

Έχουμε τότε ότι:

$$\bar{r} = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{οπότε} \quad \mathring{\bar{r}} = \frac{m_1 \mathring{\bar{r}}_1 + m_2 \mathring{\bar{r}}_2}{m_1 + m_2}$$

Θέτοντας $\bar{u}_A = \mathring{\bar{r}}_1$ και $\bar{u}_B = \mathring{\bar{r}}_2$ και $\mathring{\bar{r}} = \bar{u}_1$ έχουμε:

$$\bar{u}_1 = \frac{m_1 \bar{u}_A + m_2 \bar{u}_B}{m_1 + m_2} \Rightarrow (m_1 + m_2)\vec{u}_1 = m_1 \bar{u}_A + m_2 \bar{u}_B \quad (1)$$

Η σχετική ταχύτητα του m_1 ως προς το m_2 είναι:

$$\vec{u} = \frac{d}{dt}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = \mathring{\vec{r}}_1 - \mathring{\bar{r}}_2 = \bar{u}_A - \bar{u}_B \quad (2)$$

Από (1) κ' (2) : $\bar{u}_A = \bar{u}_1 + \dfrac{m_2 \bar{u}}{m_1 + m_2}$ και $\bar{u}_B = \bar{u}_1 - \dfrac{m_1 \bar{u}}{m_1 + m_2}$

Άρα η ολική κινητική ενέργεια είναι:

$$T = \frac{1}{2} m_1 |\bar{u}_A|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\bar{u}_B|^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\bar{u}_1 + \frac{m_2 \bar{u}}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\bar{u}_1 - \frac{m_1 \bar{u}}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)|\bar{u}_1|^2 + \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2 |\bar{u}|^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2 |\bar{u}|^2}{(m_1 + m_2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)|\bar{u}_1|^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}|\bar{u}|^2 = \frac{1}{2} M |\bar{u}_1|^2 + \frac{1}{2}\mu |\bar{u}|^2$$

Άσκηση Φυλ. 15

15. Υποθέτουμε ότι έχουμε n συστήματα σωματιδίων με κέντρα μάζας $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_n$ και ολικές μάζες M_1, M_2, ..., M_n αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι το κέντρο μάζας όλων των συστημάτων είναι στο σημείο:

$$\frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2 + ... + M_n\vec{r}_n}{M_1 + M_2 + ... + M_n}.$$

Θεωρούμε ότι το σύστημα i αποτελείται από τις μάζες: $m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{in}$ με διανύσματα θέσης $\bar{r}_{i1}, \bar{r}_{i2}, \dots, \bar{r}_{in}$, αντίστοιχα.

Τότε έχουμε ότι:

$$\bar{r}_1 = \frac{m_{11}\bar{r}_{11} + m_{12}\bar{r}_{12} + \dots + m_{1n}\bar{r}_{1n}}{m_{11} + m_{12} + \dots + m_{1n}} = \frac{m_{11}\bar{r}_{11} + m_{12}\bar{r}_{12} + \dots + m_{1n}\bar{r}_{1n}}{M_1}$$

$$\bar{r}_2 = \frac{m_{21}\bar{r}_{21} + m_{22}\bar{r}_{22} + \dots + m_{2n}\bar{r}_{2n}}{m_{21} + m_{22} + \dots + m_{2n}} = \frac{m_{21}\bar{r}_{21} + m_{22}\bar{r}_{22} + \dots + m_{2n}\bar{r}_{2n}}{M_2}$$

$$\vdots$$

$$\bar{r}_n = \frac{m_{n1}\bar{r}_{n1} + m_{n2}\bar{r}_{n2} + \dots + m_{nn}\bar{r}_{nn}}{m_{n1} + m_{n2} + \dots + m_{nn}} = \frac{m_{n1}\bar{r}_{n1} + m_{n2}\bar{r}_{n2} + \dots + m_{nn}\bar{r}_{nn}}{M_n}$$

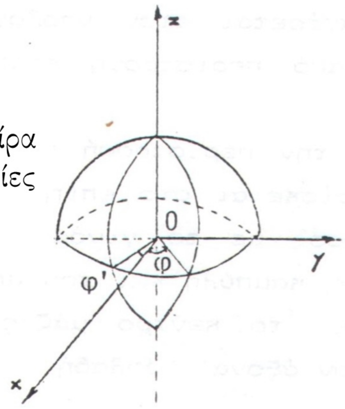
Άρα το κέντρο μάζας όλων των, n, συστημάτων είναι:

$$\bar{r} = \frac{(m_{11}\bar{r}_{11} + m_{12}\bar{r}_{12} + \dots + m_{1n}\bar{r}_{1n}) + (m_{21}\bar{r}_{21} + m_{22}\bar{r}_{22} + \dots) + \dots + (m_{n1}\bar{r}_{n1} + \dots + m_{nn}\bar{r}_{nn})}{(m_{11} + m_{12} + \dots + m_{1n}) + (m_{21} + m_{22} + \dots + m_{2n}) + \dots + (m_{n1} + m_{n2} + \dots + m_{nn})}$$

$$= \frac{M_1\bar{r}_1 + M_2\bar{r}_2 + \dots + M_n\bar{r}_n}{M_1 + M_2 + \dots + M_n}$$

Άσκηση Φυλ. 16

16. Να υπολογιστεί το κέντρο μάζας του ομογενούς σφαιρικού τομέα που ορίζεται από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ και από τα επίπεδα που διέρχονται από τον άξονα των z και σχηματίζουν γωνίες με τον άξονα των x, ϕ και $\phi'=-\phi$, αντίστοιχα $(x \geq 0)$.



Λόγω συμμετρίας έχουμε ότι $y_s=0$ και $z_s=0$, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε το x_s:

$$x_s=\frac{\iiint_V x\,dV}{\iiint_V dV}$$

, και σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι: $x=r\sin\theta\cos\phi$

Το στοιχείο όγκου dV δίνεται από τη σχέση:

$$dV=J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\phi}\right)dr\,d\theta\,d\phi=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi}\end{vmatrix}dr\,d\theta\,d\phi=$$

$=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$, όπου $J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\phi}\right)$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού από το ένα σύστημα στο άλλο.

Άρα: $$x_s=\frac{\iiint_V r^3\sin^2\theta\cos\phi\,dr\,d\theta\,d\phi}{\iiint_V r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi}=$$

$$=\frac{\int_0^{\alpha}\int_0^{\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2} r^3\sin^2\theta\cos\phi\,d\phi\,d\theta\,dr}{\int_0^{\alpha}\int_0^{\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2} r^3\sin\theta\,d\phi\,d\theta\,dr}=$$

$$=\frac{\int_0^{\alpha}r^3\left[\left(\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta\right)\int_{\phi_1}^{\phi_2}\cos\phi\,d\phi\right]dr}{\int_0^{\alpha}r^3\left[\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right)\int_{\phi_1}^{\phi_2}d\phi\right]dr}=\frac{3\pi}{16}\alpha\frac{\sin\phi_1}{\phi_1}$$

Δηλ.: $\bar{r}_s=\frac{3\pi}{16}\alpha\frac{\sin\phi_1}{\phi_1}\bar{x}_0+0\,\bar{y}_0+0\,\bar{z}_0$.

Άσκηση Φυλ. 17

17. Δίνεται η ομογενής επιφάνεια: $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ στο επίπεδο $z=0$. (i) Να βρεθεί το κέντρο μάζας της. (ii) Να σχεδιαστεί η ομογενής επιφάνεια για $x\geq 0$ και $y\geq 0$ (*).

(i) Η επίπεδη ομογενής επιφάνεια είναι έλλειψη με κέντρο το (1,2) και ημιάξονες 2 και 3 αντίστοιχα.

Το κέντρο μάζας είναι το (1,2) που είναι το κέντρο της έλλειψης

Για να το δείξω, εργάζομαι με την απλή έλλειψη:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, \quad (1)$$

Παίρνοντας : $x=\alpha\rho\cos\theta=2\rho\cos\theta$ με $0\leq\rho\leq 1$ και $0\leq\theta\leq 2\pi$

$y=\beta\rho\sin\theta=3\rho\sin\theta$

$$dxdy=\underbrace{J\left(\frac{x,y}{\rho,\theta}\right)}_{\text{Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχημ.}}d\rho d\theta=\alpha b(\rho\, d\rho d\theta).$$

$$M=\int_0^1\int_0^{2\pi}\alpha b\,\rho d\rho d\theta=\alpha b\,\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1\,\theta\Big|_0^{2\pi}=\alpha b\pi \quad (2)$$

Οπότε : $x_s=\dfrac{1}{M}\iint_S x\,dxdy \underset{(2)}{=} \dfrac{1}{\alpha b\pi}\displaystyle\int_0^1\int_0^{2\pi}(\alpha\rho\cos\theta)\alpha b\rho d\rho d\theta=$

$$=\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^1\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=\frac{\alpha}{2\pi}\sin\theta\Big|_0^{2\pi}=0$$

με όμοια διαδικασία, $y_s=0$

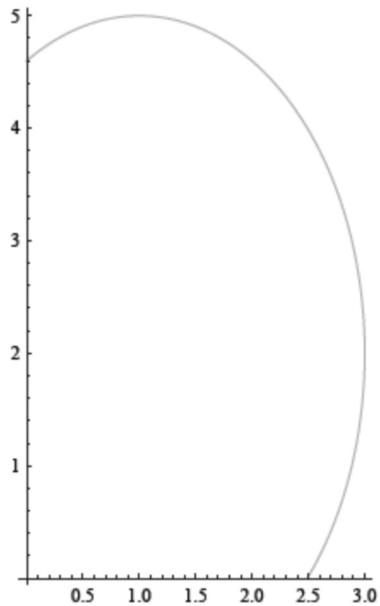
Άρα για την (1) το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας είναι το :

$\vec{r_s}=x_s\hat{x_0}+y_s\hat{y_0}=0\hat{x_0}+0\hat{y_0}$ άρα για την αρχική έλλειψη το κέντρο μάζας είναι το (1,2)

(ii) Για τον σχεδιασμό της ομογενούς επιφάνειας για $x \geq 0$ και $y \geq 0$ έχουμε ότι:

In[9]:=
```
<< Graphics`ImplicitPlot`;
ImplicitPlot[(x - 1) ^2 / 4 + (y - 2) ^2 / 9 == 1, {x, 0, 3}, {y, 0, 6}]
```

Out[10]=



Άσκηση Φυλ. 18

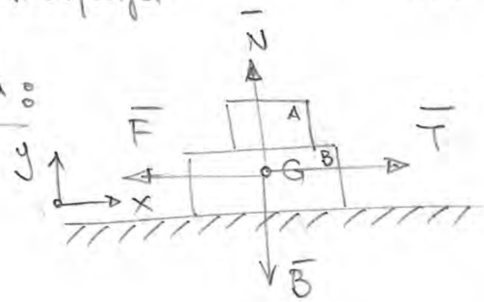
18. Σύστημα δύο μαζών A και B έχει συνολική μάζα, $M = 2\ kg$, κέντρο μάζας το σημείο G και υπόκειται στη δύναμη $\vec{F} = -8t\vec{x}_0$ (Σχήμα 48). Να υπολογιστεί η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του κέντρου μάζας του συστήματος G όταν $t = 1\ s$. Ο συντελεστής τριβής του εδάφους και της B μάζας είναι $\eta = 0.3$, (Οι μάζες A και B κινούνται μαζί, $g \simeq 10\ m/s^2$).

Από το 2ο Νόμο Νεύτωνα για το σύστημα έχουμε ότι:

$$M\frac{d^2\bar{r}_s}{dt^2} = \Sigma\bar{F} \Rightarrow \begin{cases} M\frac{d^2}{dt^2}x_s = \Sigma F_x \Rightarrow M\alpha_{sx} = \bar{F} + \overbrace{\eta|\bar{N}|\bar{\varepsilon}_0}^{\bar{T}} \quad (1) \\ M\frac{d^2}{dt}y_s = \Sigma F_y \Rightarrow M\alpha_{sy} = \bar{N} + \bar{B} \quad (2) \end{cases}$$

όπου M η συνολική μάζα

Σχηματικά:



Οπότε από (2) έχουμε ότι:

$$M\alpha_{sy} = \bar{N} + \bar{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\underbrace{\alpha_{sy}}_{=0} = \bar{N} - \bar{B} \Rightarrow 0 = \bar{N} - \bar{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{B} = \bar{N} \Rightarrow \bar{N} = 2\cdot 10 \Rightarrow |\bar{N}| = 20\ Nt$$

και φορά προς τα πάνω (βλέπε Σχήμα).

Από σχέση (1) έχουμε:

$$M\alpha_{sx} = -8t + \eta|\bar{N}|\bar{\varepsilon}_0 = -8t + 0.3\ 20\ \bar{\varepsilon}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{sx} = \frac{1}{M}\left(-8t + 6\,\bar{\varepsilon}_0\right) \Rightarrow$$

εδώ το $\bar{\varepsilon}_0$ συμπίπτει με το $\bar{x}_0$ αφού το σύστημα θα κινηθεί στο Ox άξονα

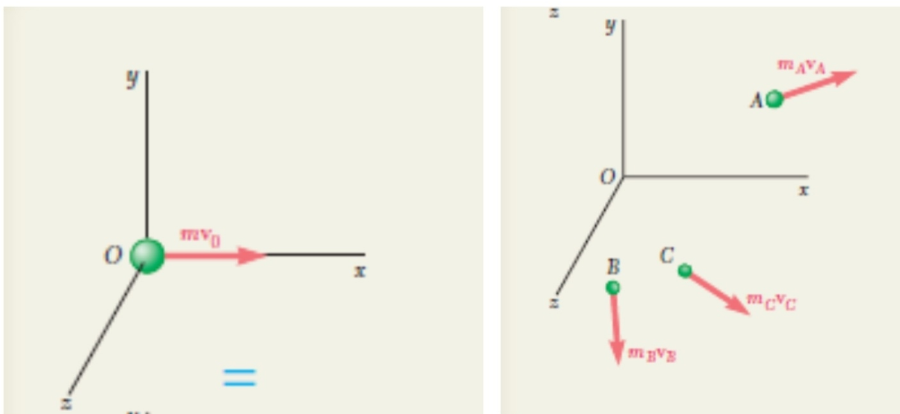
$$\Rightarrow \alpha_{sx} = \frac{1}{2}\left(-8t + 6\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{sx} = -4t + 3 \xRightarrow{t=1} \alpha_{sx} = -1\ m/s^2$$

άρα $\bar{\alpha}_s$, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος, G, θα είναι: $\bar{\alpha}_s = -1\bar{x}_0 + 0\bar{y}_0$.

Άσκηση Φυλ. 19

19. Διαστημικό όχημα μάζας, $M = 200\ kgr$, ταξιδεύει με σταθερή ορμή $\vec{p} = mu_0\vec{x}_0 (kg\ m/s)$ με $\vec{u}_0 = 150\vec{x}_0 (m/s)$ (Σχήμα 49) και περνά από την αρχή των αξόνων, O, όταν $t = 0$. Έκρηξη του οχήματος το διαχωρίζει σε τρία κομμάτια, A, B, C με μάζες 100, 60, 40 kgr αντίστοιχα. Η ταχύτητα της μάζας A κατά τη χρονική στιγμή $t = 2.5\ s$, είναι $\vec{u}_A = 270\vec{x}_0 - 120\vec{y}_0 + 160\vec{z}_0 (m/s)$ και η ταχύτητα του B βρίσκεται στο επίπεδο Oxz . Να υπολογιστεί η ταχύτητα του C την ίδια χρονική στιγμή. Οι θέσεις των μαζών A, B, C κατά τη χρονική στιγμή $t = 2.5\ s$, είναι $A(555\ m,\ -180\ m,\ 240\ m)$, $B(255\ m,\ 0\ m,\ 120\ m)$ και $C(105\ m,\ 450\ m,\ 420\ m)$. Οι εξωτερικές δυνάμεις πάνω στο σύστημα να θεωρηθούν αμελητέες.



Σχήμα 49: Σχήμα άσκησης 19, κεφ III. Διαστημικό όχημα μάζας, M, ταξιδεύει με σταθερή ορμή και περνά από την αρχή των αξόνων, O, όταν $t = 0$. Έκρηξη του οχήματος το διαχωρίζει σε τρία κομμάτια, A, B, C.

Για το σύστημα ισχύει ότι: (αφού είναι κλειστό)

η αρχική του ορμή ισούται με την τελική, δηλ.

$$\bar{P}_{Αρχ.} = \bar{P}_{Τελ} \Rightarrow m\bar{u}_0 = m_A\bar{u}_A + m_B\bar{u}_B + m_C\bar{u}_C \quad (1)$$

επίσης ισχύει για την στροφορμή ότι:

$$\bar{L}_{αρχ} = \bar{L}_{τελ} \Rightarrow 0 = \bar{r}_A \times m_A\bar{u}_A + \bar{r}_B \times m_B\bar{u}_B + \bar{r}_C \times m_C\bar{u}_C \quad (2)$$

Από ① έχουμε ότι:

$$200\,(150\,\bar{x}_0) = 100\left(270\,\bar{x}_0 - 120\,\bar{y}_0 + 160\,\bar{z}_0\right) + $$
$$+\ 60\,(u_{Bx}\,\bar{x}_0 + \underbrace{0}_{\text{από άσκηση}}\,\bar{y}_0 + u_{Bz}\,\bar{z}_0) +$$
$$+\ 40\,(u_{Cx}\,\bar{x}_0 + u_{Cy}\,\bar{y}_0 + u_{Cz}\,\bar{z}_0) \quad ③$$

Από την ② έχουμε ότι:

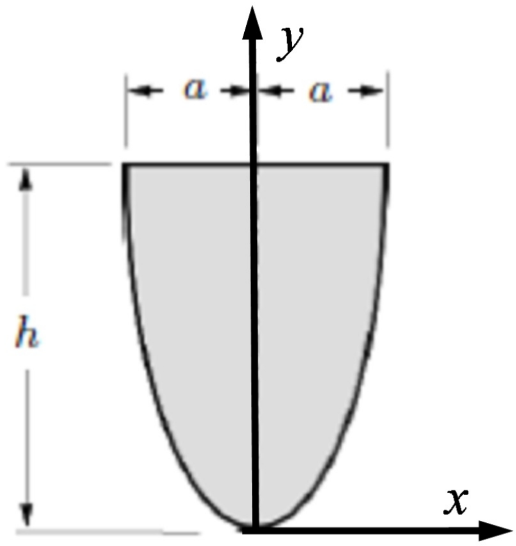
$$0 = 100 \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ 555 & -180 & 240 \\ 270 & -120 & 160 \end{vmatrix} + 60 \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ 255 & 0 & -120 \\ u_{Bx} & 0 & u_{By} \end{vmatrix} +$$
$$+\ 40 \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ 105 & 450 & -420 \\ u_{Cx} & u_{Cy} & u_{Cz} \end{vmatrix} \quad ④$$

Από σχέσεις ③ και ④, λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι:

$$\bar{u}_C = -30\,\bar{x}_0 + 300\,\bar{y}_0 - 280\,\bar{z}_0 \quad (m/s)$$

Άσκηση φυλ. 20

20. Επιφάνεια περικλείεται από την παραβολή που περνάει από την αρχή των αξόνων και την ευθεία $y = h$ (Σχήμα 50). Η επιφανειακή πυκνότητα είναι σταθερή και ίση με $\rho_s = 2\ kg/m^2$. Να βρεθεί το κέντρο μάζας.



Σχήμα 50: Σχήμα άσκησης 20, κεφ III. Επιφάνεια περικλείεται από την παραβολή που περνάει από την αρχή των αξόνων και την ευθεία $y = h$.

Επειδή η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς τον y-άξονα, θα είναι $x_s = 0$.

Η παραβολή δίνεται από τη σχέση: $y = \frac{h}{\alpha^2}x^2$

Ακόμα: $S = \iint_S dS = \iint_S dx dy = 2\int_0^\alpha \int_{\frac{h}{\alpha^2}x^2}^{h} dy dx =$

$$= 2\int_0^\alpha \left(h - \frac{h}{\alpha^2}x^2\right)dx = 2\left[hx - \frac{h}{\alpha^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^\alpha = 2\left(h\alpha - \frac{h}{\alpha^2}\frac{\alpha^3}{3}\right) =$$

$$= 2\left(h\alpha - \frac{h\alpha}{3}\right) = \frac{4}{3}h\alpha$$

Επίσης: $\iint_S y dy dx = 2\int_0^\alpha \int_{\frac{h^2}{\alpha^2}x^2}^{h} y dy dx = 2\int_0^\alpha \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^2x^4}{2\alpha^4}\right)dx =$

$$= 2\left(\frac{h^2}{2}\alpha - \frac{h^2}{2\alpha^4}\frac{\alpha^5}{5}\right) = \frac{4}{5}h^2\alpha$$

οπότε $$y_s = \frac{\frac{4}{5}h^2\alpha}{\frac{4}{3}h\alpha} = \frac{3h}{5}$$

άρα συνολικά, το κέντρο μάζας της επιφάνειας S είναι:

$$\bar{r}_s = 0\,\bar{x}_o + \frac{3h}{5}\,\bar{y}_o$$

Άσκηση Φυλ. 21

21. Βρείτε το κέντρο μάζας της καμπύλης AB του σχήματος (Σχήμα 51) από $\theta = -\alpha$ έως $\theta = \alpha$, $(\alpha > 0)$ όταν η γραμμική πυκνότητα είναι σταθερή και ίση με $\rho_l = 1\ kg/m$.

Το διάνυσμα θέσης, $\bar{r}_s$, του κέντρου μάζας δίνεται από τη σχέση

$$\bar{r}_s = \frac{\int_\ell \rho \bar{r}\, d\ell}{\int_\ell \rho\, d\ell}$$ και επειδή η γραμμική πυκνότητα είναι σταθερή

$$\bar{r}_s = \frac{\int_\ell x\, d\ell}{\ell}\bar{x}_o + \frac{\int_\ell y\, d\ell}{\ell}\bar{y}_o \quad (1)$$

$$\ell = \int_\ell d\ell = 2\int_0^\alpha r\, d\theta = 2r\alpha \quad (2)$$, επίσης

$$\int_\ell x\, d\ell = 2\int_0^\alpha r\cos\theta\, r\, d\theta = 2r^2\int_0^\alpha \cos\theta\, d\theta = 2r^2\left[\sin\theta\right]_0^\alpha = 2r^2\sin\alpha$$

$$\int_\ell y\, d\ell = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\sin\theta\, d\theta = r^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\theta\, d\theta = r^2\left[-\cos\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha} = 0$$

Οπότε: $$\bar{r}_s = \frac{\cancel{2}r^{\cancel{2}}\sin\alpha}{\cancel{2}\cancel{r}\alpha}\bar{x}_o + 0\,\bar{y}_o \Rightarrow \bar{r}_s = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}\bar{x}_o + 0\,\bar{y}_o$$